Ejercicio 4.5.2 · Curvas de nivel y recorrido

Adaptado de: 1er final 2018-1, tipo A, problema 5.

Trace las curvas de nivel de la función

$$z = \frac{-2}{\sqrt{x^2 + 4y^2}}$$

para $z = 1$ y $z = 2$. Determine el recorrido de la función.

Resolución.

1. Dominio: $x^2 + 4y^2 > 0$, es decir, todo el plano salvo el origen.
2. Recorrido: $\sqrt{x^2 + 4y^2}$ toma todos los valores de $(0, \infty)$, así que z toma todos los de $(-\infty, 0)$. $R = \{z \mid z < 0\}$.
3. Como 1 y 2 no están en el recorrido, **las curvas de nivel $z = 1$ y $z = 2$ no existen** (ningún punto da un valor positivo).
4. Lo que sí existe son los niveles negativos. Con $z = k < 0$: $\sqrt{x^2 + 4y^2} = -\frac{2}{k} \Rightarrow x^2 + 4y^2 = \frac{4}{k^2}$, elipses centradas en el origen.
5. $z = -1$: $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, elipse de semiejes 2 y 1. $z = -2$: $x^2 + \dfrac{y^2}{1/4} = 1$, elipse de semiejes 1 y $\frac{1}{2}$.
6. **Resultado: $R = (-\infty, 0)$; los niveles $z = 1$ y $z = 2$ están vacíos; las curvas de nivel son elipses $x^2 + 4y^2 = \frac{4}{k^2}$, más pequeñas cuanto más negativo es k.**

Ejercicio 4.5.3 · Pendiente de la tangente a la curva de intersección

Adaptado de: 2º final 2018-2, problema 5.

Calcule la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la gráfica de $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ con el plano $y = 0$, en el punto $P(\sqrt{5}, 0)$.

Resolución.

1. El plano $y = 0$ deja fija a y: la pendiente es $f_x(\sqrt{5}, 0)$. La curva es la semicircunferencia $z = \sqrt{9 - x^2}$ y el punto de la superficie es $(\sqrt{5}, 0, 2)$.
2. Derivada parcial:
$$f_x = \frac{-2x}{2\sqrt{9 - x^2 - y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}.$$
3. En el punto: $f_x(\sqrt{5}, 0) = \dfrac{-\sqrt{5}}{\sqrt{9 - 5}}$.
4. $m = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. La superficie baja al aumentar x, como se espera en la mitad derecha de una semiesfera.

Ejercicio 4.5.4 · Comprobar una ecuación con segundas derivadas

Adaptado de: 1er extraordinario 2015-2, problema 5.

Compruebe que se cumple

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 5\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

- Fracciones parciales: $\frac{A}{x-r}$ por factor lineal; $\frac{A_1}{x-r} + \cdots + \frac{A_k}{(x-r)^k}$ por factor repetido; $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ por cuadrático irreducible.
- $\int \frac{A\,dx}{(x-r)^2} = -\frac{A}{x-r}$; $\int \frac{x\,dx}{x^2+q} = \frac{1}{2}\ln(x^2+q)$.

3A.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Empieza el examen por el problema 3: son tres integrales y cada una se decide con la tabla de 3A.2.
2. Antes de elegir método, busca un cambio de variable inmediato (la derivada de algo está multiplicando) o una simplificación algebraica.
3. Escribe el método al inicio de cada inciso («por partes», «$x = 2\tan\theta$», «fracciones parciales»); si te equivocas después, el planteamiento cuenta.
4. En fracciones parciales, revisa grados y factoriza antes de escribir la descomposición; usa las raíces para las constantes.
5. En sustitución trigonométrica, dibuja el triángulo antes de integrar: lo necesitarás para regresar a x.
6. Comprueba cada resultado derivando (una línea) y escribe $+C$.

4.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Temperatura: razón de cambio y dirección de máximo aumento

Adaptado de: 1er extraordinario 2010-2, tipo A, problema 7.

La temperatura en el punto (x, y, z) es $T(x, y, z) = 2e^{-x^2-8y^2+9z^2}$, con T en grados Celsius y x, y, z en metros. Obtenga: a) la razón de cambio de la temperatura en el punto $(-1, 2, 2)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$; b) la dirección en la que T aumenta más rápidamente en ese punto.

Resolución.

1. Gradiente (regla de la cadena con la exponencial):

$$\nabla T = 2e^{-x^2-8y^2+9z^2}(-2x,\ -16y,\ 18z).$$

2. En $(-1, 2, 2)$ el exponente vale $-1 - 32 + 36 = 3$:

$$\nabla T(-1, 2, 2) = 2e^3(2, -32, 36) = e^3(4, -64, 72).$$

3. Vector unitario: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$, así que $\mathbf{u} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
4. a) Derivada direccional:

$$D_{\mathbf{u}}T = e^3\,\frac{8 + 128 + 72}{3} = \frac{208}{3}e^3.$$

   La temperatura aumenta a razón de $\frac{208}{3}e^3$ **°C/m** (unos 1393 °C/m).
5. b) **La dirección de máximo aumento es la de** $\nabla T(-1, 2, 2) = e^3(4, -64, 72)$, es decir, la del vector $(1, -16, 18)$; como unitario, $\frac{1}{\sqrt{581}}(1, -16, 18)$. En esa dirección la razón de cambio es $\|\nabla T\| = 4\sqrt{581}\,e^3$ °C/m.

Ejemplo resuelto · Dominio y curvas de nivel

Adaptado de: 2º final 2015-2, tipo B, problema 5.

Sea $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x}$. Represente gráficamente su dominio y obtenga las ecuaciones de sus curvas de nivel para $z = 0$ y $z = 1$.

Resolución.

1. Raíz cuadrada: $y^2 - x \geq 0$, es decir, $x \leq y^2$. $D_f = \{(x, y) \mid x \leq y^2\}$.
2. La frontera es la parábola $x = y^2$ (vértice en el origen, abre hacia la derecha) y pertenece al dominio ($\geq$): se traza continua. Con el punto $(-1, 0)$: $-1 \leq 0$ se cumple; la región es el exterior de la parábola, a su izquierda.
3. Recorrido (no se pide, pero confirma los niveles): la raíz toma todos los valores ≥ 0, así que $R_f = [0, \infty)$; los niveles $z = 0$ y $z = 1$ existen.
4. $z = 0$: $\sqrt{y^2 - x} = 0 \Rightarrow x = y^2$, la propia frontera.
5. $z = 1$: $y^2 - x = 1 \Rightarrow x = y^2 - 1$, la misma parábola recorrida una unidad a la izquierda (vértice $(-1, 0)$).
6. En general, el nivel $k \geq 0$ es $x = y^2 - k^2$: una familia de parábolas con el mismo eje.

El área siempre es positiva y se da en $[u^2]$. Si las curvas se cruzan dentro del intervalo, cambia cuál está arriba y la integral se parte en el punto de cruce.

Área en coordenadas polares SOLO PLAN 2010 . Para una curva $r = f(\theta)$, el elemento es un sector circular delgado de radio r y ángulo $\mathrm{d}\theta$, con área $\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta$:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 \mathrm{d}\theta.$$

Los límites son los ángulos entre los que la curva barre la región una sola vez; en un pétalo, los valores de θ donde $r = 0$.

Longitud de arco. Un tramo muy corto de curva es casi un segmento de largo $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$. Según cómo esté dada la curva:

$$y = f(x): \quad L = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x$$

$$x(t),\ y(t): \quad L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$r = f(\theta): \quad L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

La longitud se da en $[u]$. En los exámenes, el radicando casi siempre queda lineal ($\sqrt{1 + 9x}$) o como un cuadrado perfecto disfrazado: si no se simplifica, revisa la derivada. La derivada de las paramétricas viene de Cálculo Diferencial.

Sólido de revolución. Al girar una región plana alrededor de una recta (el *eje de giro*) se forma un sólido. Hay dos maneras de cortarlo:

- *Discos y arandelas:* el rectángulo es *perpendicular* al eje. Al girar forma un disco de radio R o, si la región no toca el eje, una arandela de radio exterior R e interior r:

$$V = \pi\int_a^b \left(R^2 - r^2\right)\mathrm{d}x.$$

- *Capas cilíndricas:* el rectángulo es *paralelo* al eje. Al girar forma un tubo delgado de radio ρ, altura h y grosor $\mathrm{d}x$, con volumen $2\pi\rho h\mathrm{d}x$:

$$V = 2\pi\int_a^b \rho(x)\,h(x)\mathrm{d}x.$$

Los radios son *distancias al eje de giro*, no ordenadas: con el eje $y = k$, el radio a la curva $y = f(x)$ es $|f(x) - k|$; con el eje $x = k$, el radio de una capa es $|x - k|$. El volumen se da en $[u^3]$.

Lo que no se pregunta. El área de una superficie de revolución, el centroide y el trabajo no aparecen en los exámenes de los dos planes; tampoco la longitud de arco en polares en el banco del Plan 2016.

3. Identifica la cónica: $x^2 + y^2 = r^2$ circunferencia; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipse; $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hipérbola; $x = y^2 + c$ parábola; $ax + by = c$ recta.
4. Dibuja las curvas pedidas en el mismo plano, cada una con su valor de k, y respeta el dominio (por ejemplo, si f tiene y en un numerador con raíz, la curva puede ser solo media cónica).

4.3.3 Límite doble por trayectorias

1. Sustituye el punto. Si f es continua ahí (no queda $\frac{0}{0}$), ese es el límite.
2. Si queda indeterminado, acércate por rectas $y = mx$ (o parábolas $y = mx^2$). Si el resultado depende de m, **el límite no existe**.
3. Ejemplo: $\dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ con $y = mx$ da $\dfrac{m}{1 + m^2}$, que cambia con m: no existe el límite en $(0, 0)$.

4.3.4 Derivadas parciales e interpretación geométrica

1. Para f_x, trata a y como constante y deriva con las reglas de una variable; para f_y, al revés.
2. «Pendiente de la recta tangente a la curva de intersección con el plano $y = b$»: es $f_x(a, b)$. Con el plano $x = a$: es $f_y(a, b)$.
3. Si piden la recta tangente, su dirección es $(1, 0, f_x)$ en el primer caso y $(0, 1, f_y)$ en el segundo.

4.3.5 Derivadas parciales sucesivas y verificación de una ecuación

1. Calcula las primeras parciales y simplifica antes de volver a derivar.
2. Respeta el orden indicado: en $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2}$ se deriva primero dos veces respecto a y y luego respecto a x. Por el teorema de las mixtas puedes elegir el orden más cómodo y decirlo.
3. Para «verificar que u satisface la ecuación» (Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$, calor $u_t = k\, u_{xx}$ u otra), calcula solo las derivadas que aparecen, sustitúyelas y agrupa términos semejantes hasta llegar a $0 = 0$.
4. Evalúa al final, si piden el valor en un punto.

4.3.6 Plano tangente y recta normal

1. Si la superficie es $z = f(x, y)$ y te dan solo (x_0, y_0), calcula $z_0 = f(x_0, y_0)$. Si te dan P_0 completo, comprueba que está en la superficie.
2. Escribe la superficie como $F(x, y, z) = 0$: pasa todo a un lado (para $z = f$, $F = f(x, y) - z$).
3. Calcula $\nabla F(P_0) = (a, b, c)$. Puedes dividir entre un factor común.
4. Plano: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$; desarrolla y simplifica.
5. Recta normal: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$, o en paramétricas $(x_0 + at,\ y_0 + bt,\ z_0 + ct)$ si alguna componente es cero.

3. Aprovecha la simetría: integra media región y multiplica por 2.
4. Calcula $A = \frac{1}{2}\int r^2 \mathrm{d}\theta$. Para $\cos^2$ y sen^2 usa el ángulo doble: $\cos^2 2\theta = \frac{1+\cos 4\theta}{2}$ (Parte A).

3B.3.3 Longitud de arco

1. Identifica la forma de la curva: $y = f(x)$, paramétrica o polar, y escribe la fórmula que corresponde.
2. Deriva y eleva al cuadrado: $[f'(x)]^2$, o $(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2$, o $r^2 + (r')^2$.
3. Simplifica el radicando antes de integrar. En paramétricas con $e^t \cos t$ y $e^t \operatorname{sen} t$, los productos cruzados se cancelan; en polares con $r = a\theta^2$, saca el factor común.
4. Integra (casi siempre un cambio de variable $u = 1 + 9x$ o $u = \theta^2 + 4$) y evalúa. Da el resultado exacto en $[u]$.

3B.3.4 Volumen por discos y arandelas

1. Dibuja la región, el eje de giro con línea punteada y un rectángulo *perpendicular* al eje.
2. Si el eje es horizontal ($y = 0$ o $y = k$), el rectángulo es vertical y se integra en x; si es vertical ($x = 0$ o $x = k$), es horizontal y se integra en y: despeja x de cada curva.
3. Mide los radios desde el eje: R hasta la curva más lejana, r hasta la más cercana ($r = 0$ si la región toca el eje).
4. Calcula $V = \pi \int (R^2 - r^2)$. Se eleva cada radio por separado: $R^2 - r^2 \neq (R - r)^2$.

Eje $y = k$. La región entre $y = x^2$ y $y = x$ ($0 \le x \le 1$) gira alrededor de $y = 2$. La recta queda arriba de la región, así que la curva más lejana es la de abajo: $R = 2 - x^2$ y $r = 2 - x$, y

$$V = \pi \int_0^1 \left[(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2\right] \mathrm{d}x = \frac{8\pi}{15}\,[u^3].$$

3B.3.5 Volumen por capas cilíndricas

1. Dibuja la región y un rectángulo *paralelo* al eje de giro.
2. Para un eje vertical ($x = 0$ o $x = k$) el rectángulo es vertical y se integra en x: radio $\rho = |x - k|$, altura h = curva de arriba menos curva de abajo.
3. Calcula $V = 2\pi \int \rho\, h \mathrm{d}x$.
4. Si puedes, comprueba con discos en y: los dos métodos dan el mismo volumen.

Cuándo conviene cada uno. Alrededor del eje y con curvas $y = f(x)$ difíciles de despejar, o con una región que necesitaría dos integrales en y, usa capas. Si x se despeja fácil ($y = \ln x \Rightarrow x = e^y$), los discos en y suelen ser más cortos.

3B.4 Ejemplo resuelto

> **Ejemplo resuelto · Área entre una parábola y una recta**
>
> *Adaptado de: 1er final 2016-1, tipo A, problema 4.*
>
> Calcule el área de la región limitada por las gráficas de $y = x^2 + 2x + 1$ y $y = 2x + 5$.
>
> **Resolución.**

Derivación implícita. Si $F(x,y,z)=0$ define z como función de x y y, y $F_z \neq 0$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Con una ecuación $F(x,y)=0$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{F_x}{F_y}$.

Gradiente y derivada direccional. El gradiente es el vector de las parciales: $\nabla f = (f_x, f_y)$ o (f_x, f_y, f_z); ∇ es el *operador nabla*. La derivada direccional en la dirección del vector *unitario* $\mathbf{u}$ es

$$D_{\mathbf{u}} f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \nabla f \cdot \mathbf{u}.$$

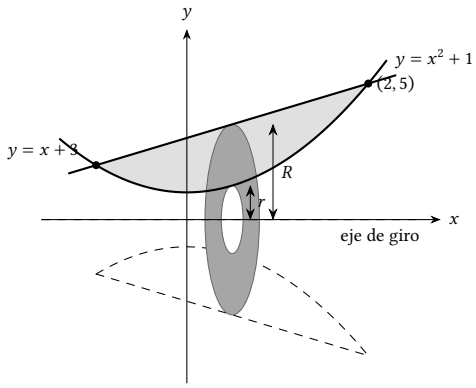
Como $\nabla f \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f\| \cos\theta$:

- f aumenta más rápido en la dirección de ∇f, y esa máxima razón de cambio (máxima variación) vale $\|\nabla f\|$;
- disminuye más rápido en la dirección de $-\nabla f$, con razón $-\|\nabla f\|$;
- no cambia en las direcciones perpendiculares a ∇f ($D_{\mathbf{u}} f = 0$);
- $\nabla f(a,b)$ es perpendicular a la curva de nivel que pasa por (a,b).

Lo que el programa menciona y no se pregunta. El Plan 2010 incluye, además, la comparación entre el incremento y la diferencial total, la diferencial de orden superior y la permanencia de la forma de la diferencial total (subtemas 4.6 y 4.7); el Plan 2016 los quitó. Los dos planes nombran la derivación implícita en sistemas de ecuaciones. En los 112 exámenes revisados no hay ningún problema de estos temas: basta saber que existen. La comparación entre incremento y diferencial aparece solo como comentario en el ejercicio de diferenciales.

4.2 Cómo reconocer el problema

El enunciado dice…	Procedimiento
«Determine el dominio», «el recorrido», «trace la región de definición»	Dominio y región (4.3.1)
«Obtenga (trace, identifique) las curvas de nivel para $z = k$»	Curvas de nivel (4.3.2)
«Calcule el límite cuando $(x,y) \to (a,b)$» o «¿es continua?»	Límite doble (4.3.3)
«Pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie con el plano $y = b$»	Derivada parcial (4.3.4)
«Calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ en (a,b)», «compruebe que las mixtas son iguales», «verifique que u satisface la ecuación…»	Parciales sucesivas (4.3.5)
«Plano tangente» o «recta normal» a una superficie en un punto	Plano tangente (4.3.6)



1. Cortes: $x^2+1 = x+3 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1)=0$. Puntos $(-1,2)$ y $(2,5)$.
2. En $x=0$ la recta vale 3 y la parábola 1: la recta está arriba. Las dos curvas están sobre el eje ($y \geq 1$), así que la región no toca el eje: arandelas con $R = x+3$ y $r = x^2+1$.
3. Integrando: $(x+3)^2 - (x^2+1)^2 = x^2 + 6x + 9 - x^4 - 2x^2 - 1 = -x^4 - x^2 + 6x + 8$.
4. Integral:

$$V = \pi \int_{-1}^{2} \left(-x^4 - x^2 + 6x + 8\right)\mathrm{d}x$$
$$= \pi \left(-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x\right)\Big|_{-1}^{2}.$$

5. En $x=2$: $-\frac{32}{5} - \frac{8}{3} + 12 + 16 = \frac{284}{15}$. En $x=-1$: $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 3 - 8 = -\frac{67}{15}$. Diferencia: $\frac{351}{15} = \frac{117}{5}$.
6. $V = \dfrac{117\pi}{5}\,[u^3] \approx 73.5\,[u^3]$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x\right) = -x^4 - x^2 + 6x + 8$.

Ejemplo resuelto · Volumen de un barril

Un barril mide 1 m de altura. Su radio es de 40 cm a la mitad de la altura y de 30 cm en las tapas, y su perfil es parabólico. Calcule cuántos litros le caben.
Resolución.

Unidad 4 · Funciones de varias variables: derivadas parciales, plano tangente y derivada direccional

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno comprenderá el concepto de función escalar de variable vectorial, determinará la variación de este tipo de funciones en cualquier dirección y la aplicará en la resolución de problemas físicos y geométricos. El programa de 2016 dice: «El alumno analizará la variación de una función escalar de variable vectorial respecto a cada una de sus variables y resolverá problemas físicos y geométricos.»

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** el tema 4 es el mismo en los dos planes (4.1 a 4.9). El Plan 2010 nombra además tres subtemas que nunca se han preguntado (párrafo final de la sección 4.1).
- **Frecuencia:** son los problemas 5 y 6 de todos los exámenes: 52 de 52 en el Plan 2010 (112 problemas: dos por examen en 42, tres en 9 y uno en el restante) y 60 de 60 en el Plan 2016 (116 problemas). Por subtema, Plan 2010 / Plan 2016: derivada direccional y gradiente 29/33; dominio, recorrido y región 22/29; plano tangente y recta normal 20/22; parciales sucesivas y mixtas (verificar una ecuación) 19/18; regla de la cadena y razones de cambio 14/12; curvas de nivel 9/10; diferencial total 3/1; límite doble 1/0; derivación implícita 1/0.
- **Tiempo:** de 4 a 5 horas para esta unidad. En el examen, de 15 a 20 minutos por problema.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 4.1 y la tabla de la 4.2 (30 min).
  2. Estudia los procedimientos 4.3.1, 4.3.2, 4.3.5, 4.3.6, 4.3.8 y 4.3.10: cubren casi todos los problemas.
  3. Sigue los dos ejemplos de la sección 4.4 tapando la resolución.
  4. Resuelve los ejercicios 4.5 con cronómetro (15 min cada uno).

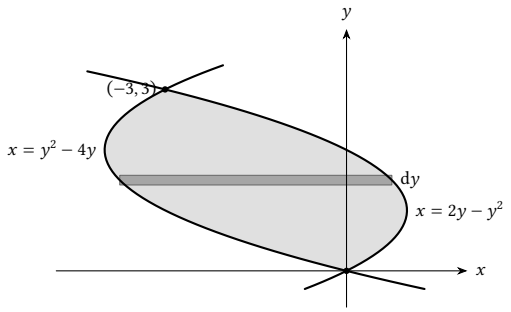
4.1 Conceptos y expresiones

Función escalar de variable vectorial. Asigna un número real a cada punto de una región del plano o del espacio: $z = f(x, y)$ o $w = f(x, y, z)$. Ejemplos físicos: la temperatura de una placa, el potencial eléctrico, el volumen de un cilindro como función de su radio y su altura.

Dominio, recorrido y región de definición. El *dominio* es el conjunto de puntos (x, y) donde la regla tiene sentido; dibujado en el plano xy es la *región de definición*. El *recorrido* es el conjunto de valores que toma z. Las tres restricciones que aparecen en los exámenes son:

- raíz cuadrada (o de índice par): radicando ≥ 0;
- logaritmo: argumento > 0;
- cociente: denominador $\neq 0$.

Resolución.



1. Se despeja x: $x = y^2 - 4y$ es una parábola horizontal que abre a la derecha, con vértice $(-4, 2)$; $x = 2y - y^2$ abre a la izquierda, con vértice $(1, 1)$.
2. Cortes: $y^2 - 4y = 2y - y^2 \Rightarrow 2y^2 - 6y = 0 \Rightarrow 2y(y-3) = 0$, así que $y = 0$ y $y = 3$. Puntos $(0, 0)$ y $(-3, 3)$.
3. Franjas horizontales. En $y = 1$: $2y - y^2 = 1$ y $y^2 - 4y = -3$; la de la derecha es $x = 2y - y^2$.
4. Largo de la franja: $(2y - y^2) - (y^2 - 4y) = 6y - 2y^2$.
5. Integral:
$$A = \int_0^3 \big(6y - 2y^2\big)\mathrm{d}y = \Big(3y^2 - \frac{2y^3}{3}\Big)\Big|_0^3 = 27 - 18.$$
6. $A = 9\,[u^2]$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\big(3y^2 - \frac{2}{3}y^3\big) = 6y - 2y^2$.

Ejercicio 3B.5.2 · Área con dos regiones: raíz cúbica y recta

Adaptado de: 2º final 2018-2, problema 4.

Calcule el área de la región limitada por las gráficas de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y $g(x) = x$.

Resolución.

1. Cortes: $\sqrt[3]{x} = x \Rightarrow x = x^3 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$, así que $x = -1, 0, 1$. Hay dos regiones.
2. En $[0, 1]$, con $x = \frac{1}{8}$: $\sqrt[3]{x} = \frac{1}{2} > \frac{1}{8}$; arriba está f. En $[-1, 0]$, con $x = -\frac{1}{8}$: $x = -\frac{1}{8} > -\frac{1}{2}$; arriba está g.
3. Las dos funciones son impares: las regiones son simétricas respecto al origen y tienen la misma área.
4. Integral:
$$A = 2\int_0^1 \big(x^{1/3} - x\big)\mathrm{d}x = 2\left(\frac{3}{4}x^{4/3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1.$$
5. $2\big(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\big) = 2 \cdot \frac{1}{4}$.
6. $A = \frac{1}{2}\,[u^2]$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\frac{3}{4}x^{4/3}\big) = x^{1/3}$. Sin partir, $\int_{-1}^1 (x^{1/3} - x)\mathrm{d}x = 0$: las dos áreas se cancelan.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 104.

Ejercicio propuesto 3B.6.3

Adaptado de: 1er extraordinario 2020-1, problema 4.

Calcule el volumen del sólido que se obtiene al girar, alrededor del eje de las abscisas, la región limitada por $x = 0$, $y = e^{-x}$, $y = 0$ y $x = \ln 2$. Dibuje el sólido.

Resultado: $V = \dfrac{3\pi}{8}\,[u^3]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 104.

Ejercicio propuesto 3B.6.4

Adaptado de: 3er extraordinario 2011-2, problema 5.

Calcule la longitud de arco de la curva $r = 3\theta^2$ en el intervalo $[0, \pi]$.

Resultado: $L = \left(\pi^2 + 4\right)^{3/2} - 8\,[u] \approx 43.65\,[u]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 104.

Ejercicio propuesto 3B.6.5

Adaptado de: 3er extraordinario 2015-1, problema 4.

SOLO PLAN 2010 Calcule el área de la región limitada por la curva $r = 2 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta$.

Resultado: $A = 6\pi\,[u^2]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 104.

Ejercicio propuesto 3B.6.6

Adaptado de: 1er extraordinario 2017-2, problema 4.

Calcule la longitud de la gráfica de $f(x) = \frac{4}{3}\sqrt{x^3}$ en el intervalo $\left[0, \frac{1}{4}\right]$.

Resultado: $L = \dfrac{2\sqrt{2} - 1}{6}\,[u] \approx 0.30\,[u]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 104.

3B.7 Errores frecuentes

- **Empezar sin figura.** Sin la gráfica no se sabe qué curva está arriba, si hay dos regiones ni si la región toca el eje de giro.
- **Integrar de un lado al otro de un cruce.** Si las curvas se cruzan dentro del intervalo, las áreas con signo se cancelan ($\int_{-1}^{1}(\sqrt[3]{x} - x)\mathrm{d}x = 0$). Parte la integral.
- **Equivocar «derecha menos izquierda».** En las parábolas horizontales despeja x con cuidado: $y^2 - 2y + x = 0$ da $x = 2y - y^2$, no $y^2 - 2y$.
- **Elevar mal en las arandelas.** $\pi\int(R^2 - r^2)$ no es $\pi\int(R - r)^2$.
- **Medir el radio desde el eje equivocado.** Con el eje $y = k$ o $x = k$, el radio es la distancia a esa recta, no la ordenada ni la abscisa.
- **Olvidar 2π en las capas o π en los discos**, o el $\frac{1}{2}$ del área en polares.
- **Límites polares por tanteo.** En un pétalo, los límites son los ángulos donde $r = 0$; integrar de 0 a 2π en una rosa da todos los pétalos.

3. Integral:
$$V = 2\pi\int_0^1 x\cdot x^2\mathrm{d}x = 2\pi\,\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{4}.$$
4. $V = \dfrac{\pi}{2}\,[u^3]$.
5. Comprobación con arandelas en y, para $1 \le y \le 2$: $R = 1$ (la recta $x = 1$) y $r = \sqrt{y-1}$ (la parábola):
$$V = \pi\int_1^2 \big[1 - (y-1)\big]\mathrm{d}y = \pi\Big(1 - \frac{1}{2}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

Ejercicio 3B.5.5 · Discos en y con logaritmo

Adaptado de: 1er final 2017-1, tipo C, problema 4.

Calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje de las ordenadas la región limitada por $y = \ln x$, $y = 0$, $y = 1$ y $x = 0$.

Resolución.

1. Se despeja x: $y = \ln x \Rightarrow x = e^y$. La región está entre el eje y ($x = 0$) y la curva $x = e^y$, para $0 \le y \le 1$.
2. La región toca el eje de giro: discos horizontales de radio $R = e^y$.
3. Integral:
$$V = \pi\int_0^1 e^{2y}\mathrm{d}y = \pi\,\frac{e^{2y}}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\big(e^2 - 1\big).$$
4. $V = \dfrac{\pi(e^2-1)}{2}\,[u^3] \approx 10.04\,[u^3]$.
5. Comprobación con capas: en x la región se parte en $0 \le x \le 1$ (altura 1) y $1 \le x \le e$ (altura $1 - \ln x$). Con partes, $\int_1^e x(1 - \ln x)\mathrm{d}x = \frac{e^2-3}{4}$, y
$$2\pi\Big(\frac{1}{2} + \frac{e^2-3}{4}\Big) = \frac{\pi(e^2-1)}{2}.$$
Los discos en y evitan partir la región y la integración por partes.

Ejercicio 3B.5.6 · Longitud de arco en cartesianas

Adaptado de: 2º final 2019-2, problema 4.

Calcule la longitud de arco de la gráfica de $f(x) = 2\sqrt{x^3}$ en el intervalo $\left[0, \frac{1}{3}\right]$.

Resolución.

1. $f(x) = 2x^{3/2} \Rightarrow f'(x) = 3x^{1/2} \Rightarrow [f'(x)]^2 = 9x$.
2. Integral:
$$L = \int_0^{1/3} \sqrt{1 + 9x}\,\mathrm{d}x.$$
3. Cambio de variable $u = 1 + 9x$, $\mathrm{d}u = 9\mathrm{d}x$; los límites pasan a $u = 1$ y $u = 4$:
$$L = \frac{1}{9}\int_1^4 u^{1/2}\mathrm{d}u = \frac{2}{27}\,u^{3/2}\Big|_1^4 = \frac{2}{27}(8 - 1).$$

Unidad 3 · Parte B · Aplicaciones de la integral: área, longitud de arco y volumen de revolución

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno adquirirá habilidad en el uso de diversas técnicas de integración y las aplicará en la resolución de problemas geométricos. El programa de 2016 dice lo mismo con otras palabras: «El alumno aplicará métodos de integración y los utilizará en la resolución de problemas geométricos.»

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** todo es de los dos planes salvo el área en coordenadas polares (3B.3.2), que solo pide el Plan 2010. La longitud de arco en paramétricas la nombra solo el programa del Plan 2010; el del Plan 2016 no, pero sale en uno de sus exámenes y se deja para los dos.
- **Frecuencia:** es el problema 4 en los 52 exámenes del Plan 2010: área entre curvas 20, volumen de revolución 16, longitud de arco 13 (cartesiana 8, paramétrica 4, polar 1) y área en polares 5. En el Plan 2016 sale en 56 de los 60 exámenes: área 36, volumen 12, longitud de arco 8 y ningún problema de polares.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta parte. Las integrales se resuelven con lo de la Parte A; aquí lo nuevo es plantearlas.
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 3B.1 y 3B.3 (30 min).
  2. Sigue los tres ejemplos de la sección 3B.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 3B.5 con cronómetro (15 min cada uno), empezando por la figura.

3B.1 Conceptos y expresiones

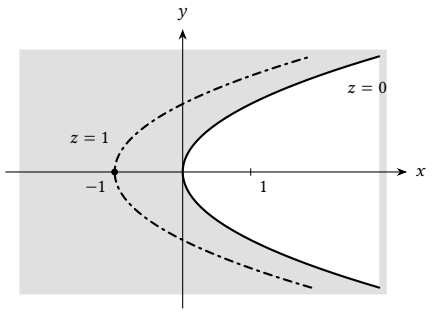
La idea de todas las aplicaciones. Se corta la figura en pedazos muy delgados, se escribe la medida de un pedazo (el *elemento diferencial*) y se suman todos con una integral definida. Los límites de la integral son el primero y el último valor de la variable en la que se corta. Por eso cada problema empieza con la gráfica de la región y un pedazo dibujado.

Área entre curvas. Si $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$, el elemento es un rectángulo vertical de altura $f(x) - g(x)$ y ancho $\mathrm{d}x$:

$$A = \int_a^b \big[f(x) - g(x)\big]\,\mathrm{d}x.$$

Si conviene cortar en franjas horizontales (curvas de la forma $x = h(y)$, como las parábolas horizontales), el elemento tiene largo «derecha menos izquierda»:

$$A = \int_c^d \big[x_{\text{der}}(y) - x_{\text{izq}}(y)\big]\,\mathrm{d}y.$$



4.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 4.5.1 · Dominio, recorrido y región con logaritmo

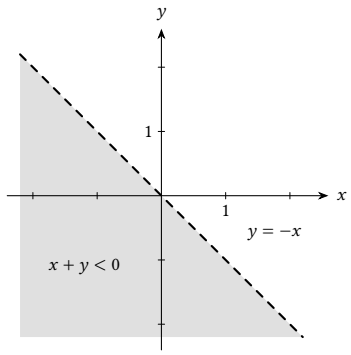
Adaptado de: 1er extraordinario 2012-1, problema 5.

Determine el dominio y el recorrido, y trace la región de definición de la función

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\ln(1 - x - y)}}.$$

Resolución.

1. Condiciones: logaritmo, $1 - x - y > 0$; raíz en el denominador, $\ln(1 - x - y) > 0$.
2. $\ln w > 0$ si y solo si $w > 1$: $1 - x - y > 1 \Rightarrow x + y < 0$. Esta condición ya implica la primera.
3. $D_f = \{(x, y) \mid x + y < 0\}$**:** el semiplano debajo de la recta $y = -x$, que no pertenece a la región (punteada). El origen no está: $0 < 0$ es falso.
4. Recorrido: en el dominio, $w = 1 - x - y$ toma todos los valores de $(1, \infty)$; entonces $\ln w \in (0, \infty)$, $\sqrt{\ln w} \in (0, \infty)$ y su recíproco también. $R_f = \{z \mid z > 0\}$**.**



3B.2 Cómo reconocer el problema

El enunciado dice…	Procedimiento
«Calcular el área de la región limitada por las gráficas de…» con $y = f(x)$	Área en x (3B.3.1)
Curvas como $y^2 - 4y - x = 0$ o $x = y^2$ (parábolas horizontales)	Área en y (3B.3.1)
«Área de un pétalo», «de la cardioide», $r = f(\theta)$	Área en polares (3B.3.2)
«Longitud de arco» o «longitud de la gráfica de f en $[a, b]$»	Longitud de arco (3B.3.3), forma cartesiana
«La curva dada por $x = \ldots$, $y = \ldots$» con parámetro t	Longitud de arco (3B.3.3), paramétricas
«Longitud de la curva $r = 3\theta^2$»	Longitud de arco (3B.3.3), polares
«Volumen del sólido… al girar alrededor del eje de las abscisas»	Discos o arandelas en x (3B.3.4)
«… alrededor del eje de las ordenadas»	Capas en x (3B.3.5) o discos en y (3B.3.4)
«… alrededor de la recta $y = k$» o «$x = k$»	Discos (3B.3.4) o capas (3B.3.5) con el radio medido desde la recta

3B.3 Procedimientos

3B.3.1 Área entre curvas

1. Dibuja las curvas: identifica rectas, parábolas (vértice y hacia dónde abren), e^x, $\ln x$. Si alguna ecuación tiene y^2 y no x^2, despeja x: es una parábola horizontal.
2. Calcula los puntos de corte igualando las dos expresiones. Los cortes son los límites de la integral.
3. Elige el corte: franjas verticales ($\mathrm{d}x$) si cada vertical entra por una curva y sale por otra; franjas horizontales ($\mathrm{d}y$) si así pasa con las horizontales. Con parábolas horizontales casi siempre es en y.
4. Decide qué curva está arriba (o a la derecha) probando un punto intermedio. Si el orden cambia, parte la integral.
5. Integra «arriba menos abajo» o «derecha menos izquierda» y da el resultado en $[u^2]$. Si sale negativo, restaste al revés.

Simetría. Si las dos funciones son impares ($\sqrt[3]{x}$ y x) o la región es simétrica respecto a un eje, calcula una parte y multiplica. Nunca integres de un lado al otro de un cruce sin partir: las áreas con signo se cancelan.

3B.3.2 Área en coordenadas polares SOLO PLAN 2010

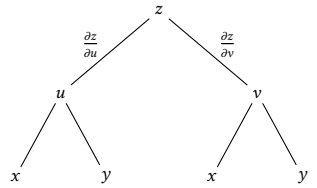
1. Dibuja la curva con una tabla de θ y r (cada $\frac{\pi}{4}$ o $\frac{\pi}{6}$). Rosa $r = a\cos n\theta$: n pétalos si n es impar y $2n$ si es par. Cardioide $r = a(1 \pm \operatorname{sen}\theta)$ o $a(1 \pm \cos\theta)$.
2. Busca los límites: en un pétalo, los ángulos consecutivos donde $r = 0$; en una curva cerrada que no pasa dos veces por el mismo punto, una vuelta completa (0 a 2π).

4.3.7 Diferencial total y cambio aproximado

1. Escribe la fórmula de la magnitud (volumen, área, resistencia…) en función de sus variables.
2. Calcula $\mathrm{d}V = V_r\,\mathrm{d}r + V_h\,\mathrm{d}h$.
3. Evalúa las parciales en los valores *iniciales* y toma $\mathrm{d}r = r_{\text{final}} - r_{\text{inicial}}$ con su signo (negativo si la variable disminuye).
4. Da el resultado con unidades y di si es aumento o disminución.

4.3.8 Regla de la cadena y razones de cambio

1. Dibuja el árbol: la función arriba, las variables intermedias en medio y las independientes abajo.
2. Para $\frac{\partial z}{\partial x}$, recorre cada camino de z a x; cada camino da un producto de derivadas y los caminos se suman.
3. Evalúa las variables intermedias en el punto antes de sustituir (por ejemplo, $u = e^{2x+y}$ en $(1, -1)$ vale e).
4. Razones de cambio relacionadas: escribe la fórmula ($V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$), deriva respecto a t con la regla de la cadena, sustituye los datos del instante y despeja la razón que falta. «Permanece constante» significa $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0$.

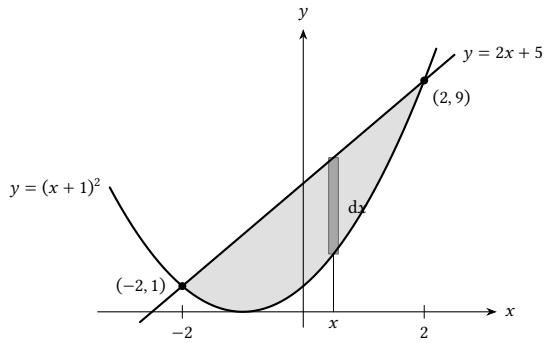


4.3.9 Derivación implícita

1. Pasa todo a un lado: $F(x, y, z) = 0$.
2. Calcula F_x, F_y y F_z tratando a las tres variables como independientes.
3. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z}$; evalúa en el punto, que debe cumplir la ecuación.

4.3.10 Gradiente y derivada direccional

1. Calcula ∇f y evalúalo en el punto.
2. Convierte la dirección en vector *unitario*: $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$. Si te dan dos puntos, $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$; si te dan un ángulo, $\mathbf{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$; si te dan una recta, usa su vector director.
3. $D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$, con unidades de f por unidad de longitud.
4. Dirección de máximo aumento: $\nabla f(P)$; de máximo descenso: $-\nabla f(P)$; máxima razón de cambio: $\|\nabla f(P)\|$.
5. Dirección en que f no cambia: $\nabla f \cdot \mathbf{u} = 0$. En el plano, si $\nabla f = (a, b)$, son $\pm(-b, a)$; con ángulo, $a\cos\theta + b\operatorname{sen}\theta = 0$.



1. Figura: $y = (x+1)^2$ es una parábola con vértice en $(-1, 0)$ que abre hacia arriba; $y = 2x + 5$ es una recta de pendiente 2.
2. Cortes: $x^2 + 2x + 1 = 2x + 5 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$. Puntos $(-2, 1)$ y $(2, 9)$.
3. En $x = 0$ la recta vale 5 y la parábola 1: la recta está arriba. Rectángulo vertical de altura $(2x + 5) - (x^2 + 2x + 1) = 4 - x^2$.
4. Integral:
$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\mathrm{d}x = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2}.$$
5. Evaluación: $\left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$.
6. $A = \dfrac{32}{3}\,[u^2] \approx 10.67\,[u^2]$**.** Comprobación: el integrando $4 - x^2$ es par, así que $A = 2\int_0^2 (4 - x^2)\mathrm{d}x = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}$.

Ejemplo resuelto · Volumen por arandelas alrededor del eje x

Adaptado de: 3er extraordinario 2011-2, problema 4.

Calcule el volumen del sólido que se genera al girar, alrededor del eje x, la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 1$ y $y = x + 3$.

Resolución.

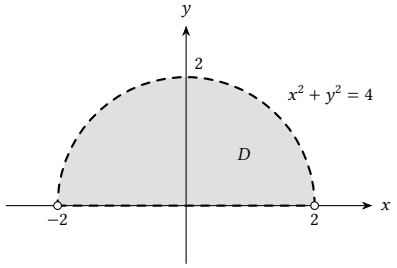
El enunciado dice…	Procedimiento
«Por medio de diferenciales…», «cambio aproximado», «error en el volumen»	Diferencial total (4.3.7)
«Sean $z = f(u, v)$, $u = \ldots$, $v = \ldots$», «calcule $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$», «¿a qué razón cambia…?»	Regla de la cadena (4.3.8)
«$F(x, y, z) = 0$ define z como función de x y y»	Derivación implícita (4.3.9)
«Derivada direccional», «razón de cambio en la dirección de…», «dirección de máximo aumento», «máxima variación», «dirección en que no cambia»	Gradiente y derivada direccional (4.3.10)

4.3 Procedimientos

4.3.1 Dominio, recorrido y región de definición

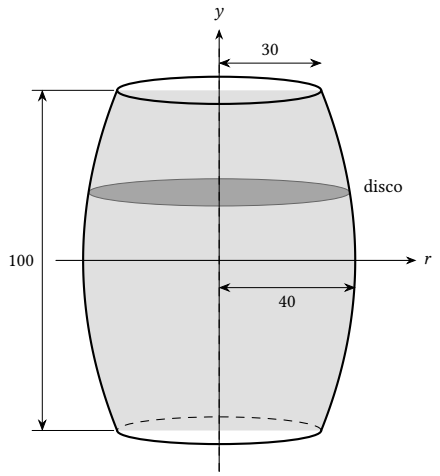
1. Escribe una condición por cada raíz par (≥ 0), logaritmo (> 0) y denominador ($\neq 0$). Si una raíz está en el denominador, la condición es > 0.
2. Resuelve cada condición para dejar a la vista la curva frontera: recta, circunferencia, elipse, parábola o hipérbola (completa cuadrados si hace falta).
3. Toma la intersección de todas las condiciones y escríbela como conjunto: $D_f = \{(x, y) \mid \ldots\}$.
4. Dibuja la frontera: continua si el signo es $\geq$ o $\leq$, punteada si es $>$, $<$ o $\neq$. Para saber de qué lado está la región, prueba un punto, como el origen.
5. Recorrido: sigue la cadena de valores de adentro hacia afuera (por ejemplo, $w = 1 - x - y \in (1, \infty) \Rightarrow \ln w \in (0, \infty) \Rightarrow \ldots$).

Por ejemplo, $f(x, y) = \dfrac{\ln y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$ pide $y > 0$ (logaritmo) y $4 - x^2 - y^2 > 0$ (raíz en el denominador). Su región de definición es el semidisco superior abierto: los dos bordes van punteados.



4.3.2 Curvas de nivel

1. Calcula primero el recorrido: solo los k del recorrido tienen curva de nivel.
2. Iguala $f(x, y) = k$, despeja hasta quitar raíces y denominadores (eleva al cuadrado cuidando el signo) y lleva la ecuación a la forma canónica.



1. Ejes: el eje y es el eje del barril, con el origen a la mitad de la altura y todo en centímetros, así que $-50 \le y \le 50$. El radio a la altura y es $r(y)$.
2. Perfil parabólico, simétrico, con máximo 40 en $y = 0$: $r(y) = 40 - ky^2$. En las tapas, $r(\pm 50) = 30 \Rightarrow 40 - 2500k = 30 \Rightarrow k = \frac{1}{250}$. Así, $r(y) = 40 - \frac{y^2}{250}$.
3. Cada corte horizontal es un disco de radio $r(y)$ y grosor $\mathrm{d}y$: $\mathrm{d}V = \pi\, r(y)^2 \mathrm{d}y$.
4. Por simetría, el doble de la mitad de arriba:

$$V = \pi \int_{-50}^{50} \Big(40 - \frac{y^2}{250}\Big)^2 \mathrm{d}y$$
$$= 2\pi \int_{0}^{50} \Big(1600 - \frac{8y^2}{25} + \frac{y^4}{62\,500}\Big)\mathrm{d}y.$$

5. Término a término, de 0 a 50: $1600(50) = 80\,000$; $\frac{8}{25}\cdot\frac{50^3}{3} = \frac{40\,000}{3}$; $\frac{1}{62\,500}\cdot\frac{50^5}{5} = 1000$. Suma: $81\,000 - \frac{40\,000}{3} = \frac{203\,000}{3}$.
6. $V = \dfrac{406\,000\pi}{3}\ \mathrm{cm}^3 \approx 425\,162\,\mathrm{cm}^3$. Como $1\ \mathrm{L} = 1000\ \mathrm{cm}^3$:
7. **Al barril le caben unos 425 L.** Comprobación: un cilindro de radio 40 cm y 1 m de alto tendría unos 503 L, y uno de radio 30 cm, unos 283 L; el barril queda entre los dos y más cerca del primero, porque casi toda su altura tiene radio cercano a 40.

3B.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 3B.5.1 · Área entre dos parábolas horizontales

Adaptado de: 2º extraordinario 2015-1, problema 4.

Calcule el área de la región limitada por las gráficas de $y^2 - 4y - x = 0$ y $y^2 - 2y + x = 0$.

En la figura, el borde que pertenece a la región se traza continuo y el que no pertenece, punteado. Una *región* es abierta si no contiene ningún punto de su frontera y cerrada si los contiene todos.

Gráfica y curvas de nivel. La gráfica de $z = f(x, y)$ es una superficie en el espacio. Su *curva de nivel* k es el conjunto de puntos del plano xy donde $f(x, y) = k$: es la proyección del corte de la superficie con el plano $z = k$. Solo hay curva de nivel para los k del recorrido. Con tres variables, $f(x, y, z) = k$ es una *superficie de nivel*.

Límite y continuidad. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$ significa que f se acerca a L por *cualquier* trayectoria que llegue a (a, b). Si dos trayectorias dan valores distintos, el límite no existe. f es continua en (a, b) si el límite existe y vale $f(a, b)$. Los polinomios, la exponencial, el seno y el coseno son continuos en todo el plano; los cocientes, raíces y logaritmos, en su dominio.

Derivadas parciales. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x$ se calcula derivando respecto a x con y constante; f_y, con x constante. Interpretación geométrica: $f_x(a, b)$ es la pendiente de la recta tangente, en el punto $(a, b, f(a, b))$, a la curva que resulta de cortar la superficie con el plano $y = b$; $f_y(a, b)$, la de la curva que resulta del corte con $x = a$. Interpretación física: razón de cambio de f cuando solo cambia una variable.

Derivadas parciales sucesivas. Se deriva otra vez: $f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, f_{yy}, y las mixtas $f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ (primero x, luego y) y f_{yx}. *Teorema de las derivadas mixtas* (de Schwarz): si las mixtas son continuas, $f_{xy} = f_{yx}$; el orden no importa. Lo mismo con las de tercer orden.

Vector normal, plano tangente y recta normal. Si la superficie es $F(x, y, z) = 0$, el gradiente $\nabla F = (F_x, F_y, F_z)$ en un punto P_0 de ella es normal a la superficie. Con $\mathbf{n} = \nabla F(P_0) = (a, b, c)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

es el plano tangente, y la recta normal es

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Si la superficie es $z = f(x, y)$, basta tomar $F = f(x, y) - z$, con normal $(f_x, f_y, -1)$.

Diferencial total. Si $z = f(x, y)$ es diferenciable,

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y,$$

y para cambios pequeños $\Delta z \approx \mathrm{d}z$. Con tres variables se agrega $f_z\,\mathrm{d}z$.

Regla de la cadena. Si $z = f(u, v)$ con $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

y lo mismo con y. Si $z = f(x, y)$ con $x = x(t)$ y $y = y(t)$, la *derivada total* es

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Ejercicio 3B.5.3 · Arandelas entre seno y coseno hiperbólicos

Adaptado de: 1er final 2018-1, tipo C, problema 4.

Calcule el volumen del sólido que se genera al girar, alrededor del eje de las abscisas, la región limitada por las gráficas de $y = \operatorname{senh} x$, $y = \cosh x$, $x = 0$ y $x = \ln 2$.

Resolución.

1. Figura: $\cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x} > 0$, así que $\cosh x$ está arriba; en $[0, \ln 2]$, $\operatorname{senh} x \geq 0$. La región va de $y = \operatorname{senh} x$ a $y = \cosh x$ y no toca el eje (salvo en el punto $(0, 0)$ de su borde inferior).
2. Arandelas: $R = \cosh x$, $r = \operatorname{senh} x$.
3. Integral, con la identidad $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$:

$$V = \pi \int_0^{\ln 2} \big(\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x\big)\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\ln 2} \mathrm{d}x.$$

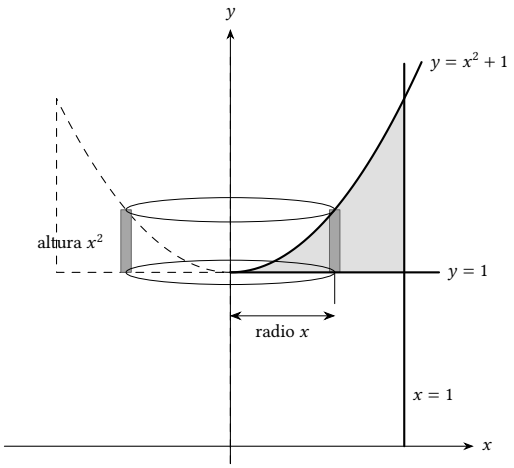
4. $V = \pi \ln 2\,[u^3] \approx 2.18\,[u^3]$. Comprobación: con $\cosh \ln 2 = \frac{5}{4}$ y $\operatorname{senh} \ln 2 = \frac{3}{4}$, el integrando en $x = \ln 2$ es $\frac{25}{16} - \frac{9}{16} = 1$.

Ejercicio 3B.5.4 · Capas cilíndricas alrededor del eje y

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo C, problema 4.

Calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje de las ordenadas la región limitada por las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = 1$ y $x = 1$.

Resolución.



1. Región: $0 \leq x \leq 1$ y $1 \leq y \leq x^2 + 1$. El eje de giro ($x = 0$) es su borde izquierdo.
2. Rectángulos verticales (paralelos al eje): capas de radio $\rho = x$ y altura $h = (x^2+1) - 1 = x^2$.

- **Olvidar el 1 en la longitud de arco**: es $\sqrt{1 + [f']^2}$, no $\sqrt{[f']^2}$.

3B.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Área en x: $A = \int_a^b \big[f(x) - g(x)\big]\mathrm{d}x$, con f arriba.
- Área en y: $A = \int_c^d \big[x_{\text{der}} - x_{\text{izq}}\big]\mathrm{d}y$.
- Área en polares SOLO PLAN 2010 : $A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 \mathrm{d}\theta$.
- Arco, cartesianas: $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$.
- Arco, paramétricas: $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t$.
- Arco, polares: $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\,\mathrm{d}\theta$.
- Discos y arandelas: $V = \pi \int_a^b \big(R^2 - r^2\big)\mathrm{d}x$ (o $\mathrm{d}y$).
- Capas: $V = 2\pi \int_a^b \rho\, h \mathrm{d}x$, con ρ la distancia al eje.
- Identidades útiles: $\cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}$, $\operatorname{sen}^2 u = \frac{1-\cos 2u}{2}$, $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$.

3B.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Dibuja las curvas, marca los puntos de corte y sombrea la región. Dibuja un rectángulo (o un sector) representativo.
2. En volumen, dibuja el eje de giro punteado y decide: rectángulo perpendicular al eje (discos) o paralelo (capas).
3. Escribe el elemento diferencial con palabras: «arriba menos abajo», «radio exterior», «radio por altura».
4. Plantea la integral con sus límites y simplifica el integrando antes de integrar.
5. Integra con la técnica de la Parte A, evalúa con fracciones exactas y escribe las unidades $[u^2]$, $[u]$ o $[u^3]$.
6. Revisa el signo y el orden de magnitud con la figura: un área no puede salir negativa ni mayor que el rectángulo que la contiene.

4. $L = \dfrac{14}{27}\,[u] \approx 0.52\,[u]$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[\frac{2}{27}(1+9x)^{3/2}\big] = \frac{2}{27}\cdot\frac{3}{2}\cdot 9\sqrt{1+9x} = \sqrt{1+9x}$.

Ejercicio 3B.5.7 · Longitud de arco en paramétricas: espiral

Adaptado de: 2º extraordinario 2011-1, problema 5.

Calcule la longitud de la curva dada por $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\operatorname{sen} t$, con $t \in [0, \ln 11]$.

Resolución.

1. Derivadas (producto):

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -e^{-t}(\cos t + \operatorname{sen} t)$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = e^{-t}(\cos t - \operatorname{sen} t)$$

2. Suma de cuadrados: los productos cruzados $\pm 2\operatorname{sen} t\cos t$ se cancelan,

$$e^{-2t}\big[(\cos t + \operatorname{sen} t)^2 + (\cos t - \operatorname{sen} t)^2\big] = 2e^{-2t}.$$

3. Integral:

$$L = \int_0^{\ln 11} \sqrt{2}\,e^{-t}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\,\big(-e^{-t}\big)\Big|_0^{\ln 11} = \sqrt{2}\Big(1 - \frac{1}{11}\Big).$$

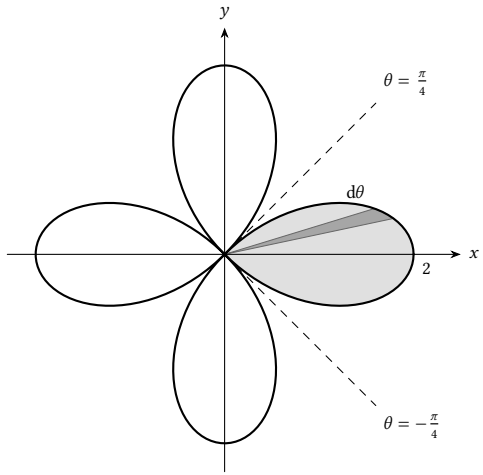
4. $L = \dfrac{10\sqrt{2}}{11}\,[u] \approx 1.29\,[u]$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(-\sqrt{2}e^{-t}\big) = \sqrt{2}e^{-t}$; y la distancia al origen baja de 1 a $\frac{1}{11}$: L es mayor que esa diferencia, $\frac{10}{11}$.

Ejercicio 3B.5.8 · Área de un pétalo de una rosa

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo A, problema 4.

SOLO PLAN 2010 Calcule el área de la región limitada por uno de los pétalos de la rosa $r = 2\cos 2\theta$.

Resolución.



1. La rosa tiene $2\cdot 2 = 4$ pétalos de largo 2. El pétalo sobre el eje x positivo empieza y acaba donde $r = 0$: $\cos 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{4}$.
2. Por simetría respecto al eje x, el doble de la mitad de arriba:

$$A = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 4\cos^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/4} 2\big(1+\cos 4\theta\big)\mathrm{d}\theta.$$

3. $\big(2\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4\theta\big)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi = \frac{\pi}{2}$.
4. $A = \dfrac{\pi}{2}\,[u^2] \approx 1.57\,[u^2]$. Comprobación: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\big(2\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4\theta\big) = 2 + 2\cos 4\theta = 4\cos^2 2\theta$; los cuatro pétalos suman 2π, la mitad del círculo de radio 2.

3B.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E**.

Ejercicio propuesto 3B.6.1

Adaptado de: 2º final 2016-2, problema 4.

Calcule el área de la región limitada por las curvas $y = 4x^3$ y $y = 8x^2$.

Resultado: $A = \dfrac{16}{3}\,[u^2]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 103.

Ejercicio propuesto 3B.6.2

Adaptado de: 2º final 2016-1, tipo A, problema 4.

Calcule el volumen del sólido que se forma al girar alrededor del eje de las ordenadas la región limitada por las gráficas de $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 1$ y $x = 0$.

Resultado: $V = \dfrac{\pi}{7}\,[u^3]$.